www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Groupe B

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations et conventions

On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Si $n \in \mathbb{N}^*$ on note $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Si S est une partie de $\mathbb{C}$, on note $M_{m,n}(S)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans S, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $M_n(S) = M_{n,n}(S)$. On note 0 la matrice nulle dans $M_{m,n}(\mathbb{C})$ et I la matrice identité dans $M_n(\mathbb{C})$. On note ${}^tX \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ la transposée de $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. On identifie $\mathbb{C}^n$ à $M_{1,n}(\mathbb{C})$ et $M_{n,1}(\mathbb{C})$. Ainsi si $x \in \mathbb{C}^n$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, Ax désigne un vecteur de $\mathbb{C}^m$.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $(x \mid x') = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i$ et $\| x \| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\| A \| = \sup \{ \| Ax \| ;\ x \in \mathbb{R}^n, \| x \| \leqslant 1 \}$.

Si $S \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{N}_{m,n}(S) = \{ \| A \| ;\ A \in M_{m,n}(S) \}$ et $\mathcal{N}(S) = \bigcup_{m,n} \mathcal{N}_{m,n}(S)$.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de $\mathcal{N}(S)$.

PARTIE I

I. 1. Vérifier que si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|$.

I. 2. Soit $X \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On pose $Y = \begin{pmatrix} 0 & X \\ {}^tX & 0 \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\| X \| = \| {}^tX \| = \| Y \| = \| X\,{}^tX \|^{\frac{1}{2}} = \| {}^tXX \|^{\frac{1}{2}}$.

PARTIE II

II. 1. Étant donné $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer une base de l'espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \lambda u_{n+1} + u_n = 0$$

en fonction d'une racine μ du polynôme $x^2 + \lambda x + 1$.

II. 2. Déterminer les valeurs propres de la matrice d'ordre $\ell \geqslant 2$:

$$Y_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en exprimant $P_\ell(\lambda) = \det(Y_\ell - \lambda I)$ en fonction de μ.

II. 3. Déterminer les vecteurs propres de Y_ℓ ; on pourra les rechercher sous la forme $x = (\sin k\theta)_{k \in [\ell]}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$k \in [\ell]$

II. 4. Calculer $\| Y_\ell \|$.

PARTIE III

III. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. On écrit $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si tous les $a_{i,j}$ sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$) si toutes les composantes de x sont positives ou nulles (resp. strictement positives). À une bijection σ de $[n]$ sur lui-même, on associe la matrice $A_\sigma = (a^\sigma_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, avec $a^\sigma_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$. On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est réductible s'il existe une bijection σ de $[n]$ sur lui-même, deux matrices carrées B et D, d'ordre au moins 1, et une matrice C, telles que :

$$A_\sigma A A_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

On dit que A est irréductible si elle n'est pas réductible.

Tournez la page S.V.P.

On note $M_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \geqslant 0$ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ qui sont irréductibles. Dans toute cette partie on considère une matrice A de $M_n^+(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$.

III. 1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ non nul, ayant au moins une composante nulle, vérifiant $y \geqslant 0$. Montrer que le nombre de composantes nulles de $(I + A)y$ est strictement inférieur à celui de y. (On pourra se ramener au cas où $y = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ avec $y_i > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.)

III. 2. Montrer que $(I + A)^{n-1} > 0$.

III. 3. Soit $K' = (I + A)^{n-1}(\mathbb{R}_+^n) = \{(I + A)^{n-1} x; x \in \mathbb{R}_+^n\}$. On pose $K = K' \setminus \{0\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ on pose $r(x) = \sup \{r \in \mathbb{R}; Ax - rx \geqslant 0\}$. Noter que $r(x)$ est fini.

Montrer que si $y = (I + A)^{n-1} x$, $r(x) \leqslant r(y)$.

III. 4. Montrer que la restriction de la fonction $x \longrightarrow r(x)$ à K est continue.

III. 5. Déduire des questions précédentes qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ non nul, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$ non nul, $r(x) \leqslant r(x_0)$. On note $\rho = r(x_0)$.

III. 6. Montrer que $\rho > 0$.

III. 7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^n$ non nul tel que $r(x) = \rho$. Montrer que $Ax = \rho x$ et que $x > 0$. (On pourra considérer $(I + A)^{n-1}(Ax - \rho x)$.)

III. 8. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre non nul de A pour une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer, en utilisant $x^+ = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, que $|\alpha| \leqslant \rho$ et que si $|\alpha| = \rho$, toutes les composantes de x sont non nulles. En déduire que l'ensemble des vecteurs propres de A pour la valeur propre ρ est une droite.

III. 9. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre non nul de A pour une valeur propre α distincte de ρ. Montrer que l'on ne peut avoir $x \geqslant 0$, en calculant $(x|u)$ pour un vecteur propre u judicieux de ${}^tA$.

PARTIE IV

IV. Si $A \in M_n^+(\mathbb{R})$, on appelle vecteur de Perron-Frobenius pour A un vecteur propre $x > 0$ de A. D'après III un tel vecteur existe, est unique à multiplication par un réel strictement positif près, et correspond à l'unique valeur propre maximale en module et positive de A.

IV. 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant $A \geqslant 0$.

IV. 1.1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre vérifiant $x > 0$, alors $Ax = \| A \| x$.

IV. 1.2. Montrer que $\| A \|$ est égale à la plus grande valeur propre positive ou nulle de A.

IV. 2. Pour s un réel strictement positif on considère les matrices symétriques d'ordre $\ell \geqslant 2$:

$$V_\ell = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_\ell = \begin{pmatrix} 0 & s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. 2.1. Montrer que la suite des $\| V_\ell \|$ et celle des $\| W_\ell \|$ sont bornées.

IV. 2.2. On note v_ℓ la plus grande valeur propre de V_ℓ, w_ℓ la plus grande valeur propre de W_ℓ.

IV. 2.2.*a*. Montrer que les suites (v_ℓ) et (w_ℓ) sont strictement croissantes. (On pourra établir une relation de récurrence vérifiée par le polynôme caractéristique de V_ℓ (resp. W_ℓ).)

IV. 2.2.*b*. Montrer que si $s > 1$, $v_\ell > 2$ pour ℓ assez grand, et que si $s > \sqrt{2}$, $w_\ell > 2$ pour ℓ assez grand.

Tournez la page S.V.P.

IV. 2.3. Montrer que si $s > 1$, $\lim_{\ell \to +\infty} \| V_\ell \| = s + s^{-1}$ et que si $s > \sqrt{2}$, $\lim_{\ell \to +\infty} \| W_\ell \| = s^2 (s^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$.

IV. 3. Soient $S_0 \subset S \subset \mathbb{R}_+$ deux parties de $\mathbb{R}_+$ telles que tout élément de S soit somme finie d'éléments de S_0, et que 0 appartienne à S_0.

IV. 3.1. Soit $Y \in M_n(S)$ une matrice symétrique irréductible. On écrit $Y = Y_1 + \ldots + Y_k$, les matrices Y_i étant des matrices symétriques appartenant à $M_n(S_0)$. On pose :

$$X' = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_k \\ Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_k & Y_1 & \cdots & Y_{k-1} \end{pmatrix} \in M_{kn}(S_0).$$

Montrer que $\| X' \| = \| Y \|$ en considérant des vecteurs de Perron-Frobenius judicieux.

IV. 3.2. Déduire de I.2 et IV. 3.1. que $\mathcal{N}(S_0) = \mathcal{N}(S)$.

PARTIE V

V. On fixe $S \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 et on note $T = \mathcal{N}(S)$. On veut montrer que $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$.

V. 1. Vérifier que $\mathcal{N}(S) \subset \mathcal{N}(T)$.

V. 2. Soient m, n, p des entiers de $\mathbb{N}^*$.

Si $Z \in M_{pm,\,pn}(\mathbb{R})$, on écrit : $Z = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & \cdots & Z_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{m,1} & \cdots & Z_{m,n} \end{pmatrix}$

avec des matrices $Z_{i,j} \in M_p(\mathbb{R})$. On définit

$N(Z) \in M_{m,n}(\mathbb{R}_+)$ comme la matrice : $N(Z) = \begin{pmatrix} \| Z_{1,1} \| & \cdots & \| Z_{1,n} \| \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \| Z_{m,1} \| & \cdots & \| Z_{m,n} \| \end{pmatrix}$

et on pose $|||\, Z \,|||_p = \sup_{\substack{i \in [m] \\ j \in [n]}} (\|Z_{i,j}\|)$.

V. 2.1. Soit $Y \in M_{pn}(\mathbb{R})$. Montrer que $|||\, Y \,|||_p \leqslant \| Y \| \leqslant n\, |||\, Y \,|||_p$. Pour cela on pourra écrire :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & & & 0 \\ & Y_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Y_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Y_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & Y_{n-1,n} \\ Y_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

V. 2.2. Montrer que si $Z \in M_{pm,\,pn}(\mathbb{R})$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|||\, ({}^t Z Z)^k \,|||_p \leqslant |||\, ({}^t N(Z) N(Z))^k \,|||_1$.

V. 2.3. Déduire des questions précédentes que $\| Z \| \leqslant \| N(Z) \|$. On pourra remarquer que si $B \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, $\| B \| = \| B^k \|^{\frac{1}{k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Tournez la page S.V.P.

V. 3. Soit $X = (x_{i,j}) \in M_{m,n}(T)$.

V. 3.1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, des matrices symétriques $Y_{i,j} \in M_p(S)$ et des vecteurs $\xi_{i,j} \in \mathbb{R}^p$, avec $\xi_{i,j} > 0$, tels que $Y_{i,j}\,\xi_{i,j} = \| Y_{i,j} \|\, \xi_{i,j} = x_{i,j}\, \xi_{i,j}$.

V. 3.2. On fixe une bijection $\varphi : [p^{mn}] \longrightarrow M_{m,n}([p])$. À la matrice $Y_{i,j} = (y^{i,j}_{r,s})_{\substack{r \in [p] \\ s \in [p]}} \in M_p(S)$, on associe une matrice $Z_{i,j} = (z^{\,i,j}_{a,b})_{\substack{a \in [p^{mn}] \\ b \in [p^{mn}]}} \in M_{p^{mn}}(S)$ de la façon suivante : si $\varphi(a) = (a_{k,\ell})_{\substack{k \in [m] \\ \ell \in [n]}}$, $\varphi(b) = (b_{k,\ell})_{\substack{k \in [m] \\ \ell \in [n]}}$, on pose $z^{\,i,j}_{a,b} = y^{i,j}_{a_{i,j},\, b_{i,j}} \prod \delta_{a_{k,\ell},\, b_{k,\ell}}$, le produit étant pris sur les $(k,\ell) \in [m] \times [n]$ avec $(k,\ell) \neq (i,j)$. Soient $\xi_{i,j} = (\xi^{i,j}_1, \ldots, \xi^{i,j}_p) \in \mathbb{R}^p$ des vecteurs vérifiant $Y_{i,j}\,\xi_{i,j} = x_{i,j}\,\xi_{i,j}$. On leur associe le vecteur $\xi = (\xi_a)_{a \in [p^{mn}]} \in \mathbb{R}^{p^{mn}}$, avec $\xi_a = \prod_{(k,\ell) \in [m] \times [n]} \xi^{k,\ell}_{a_{k,\ell}}$, si $\varphi(a) = (a_{k,\ell})_{(k,\ell) \in [m] \times [n]}$.

Vérifier que pour tout $(i,j) \in [m] \times [n]$, $Z_{i,j}\,\xi = x_{i,j}\,\xi$.

V. 3.3. D'après V. 3.1. et V. 3.2., il existe $q \geqslant 1$, $Z \in M_{qm,qn}(S)$ de la forme : $Z = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & \cdots & Z_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m,1} & \cdots & Z_{m,n} \end{pmatrix}$

avec $Z_{i,j} \in M_q(S)$ vérifiant $\| Z_{i,j} \| = x_{i,j}$, et il existe $\xi \in \mathbb{R}^q$ non nul tel que pour tout $(i,j) \in [m] \times [n]$, $Z_{i,j}\,\xi = x_{i,j}\xi$. À l'aide de ξ et d'un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifiant $\| X\,\eta \| = \| X \|\, \| \eta \|$, construire un vecteur $\zeta \in \mathbb{R}^{qn}$, non nul, tel que $\| Z\,\zeta \| = \| X \|\, \| \zeta \|$.

V. 3.4. Déduire de V. 2.3. et V. 3.3. que $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T)$.

PARTIE VI

VI. Dans cette partie on fixe $S \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 et 1 et on utilise le résultat obtenu en V : $\mathcal{N}(\mathcal{N}(S)) = \mathcal{N}(S)$.

VI. 1. Montrer que si s et t sont non nuls et appartiennent à $\mathcal{N}(S)$, alors $s + t$, $(s^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2}\,(s + (s^2 + 4kt^2)^{\frac{1}{2}})$ pour $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\mathcal{N}(S)$. On pourra pour cela déterminer des vecteurs de Perron-Frobenius associés aux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ s & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s & t & \cdots & t \\ t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{k+1}(S).$$

VI. 2. On note $\overline{\mathcal{N}(S)}$ l'adhérence de $\mathcal{N}(S)$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer, en utilisant IV. 2., que si s appartient à $\mathcal{N}(S)$, alors $s + s^{-1}$ appartient à $\overline{\mathcal{N}(S)}$ si $s > 1$, et $s^2\,(s^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ appartient à $\overline{\mathcal{N}(S)}$ si $s > \sqrt{2}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail